

| | |
|----------------|--|
| ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ: | ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ) / Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ (ΕΠΑΛ) |
| ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: | 26 – 08 – 2025 |

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. (i) Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 \in A$;

(Μονάδες 5)

(ii) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 5)

A2. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση ή καμπύλη της f σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy ;

(Μονάδες 5)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Οι τετμημένες των σημείων (εφόσον υπάρχουν) στα οποία η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f τέμνει τον άξονα x' , προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης $f(x) = 0$.

β. Μία συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα λέγεται γνησίως μονότονη.

γ. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το σύνολο A , τότε η συνάρτηση

$$R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

έχει πάντοτε πεδίο ορισμού το σύνολο A .

δ. Αν για μία συνάρτηση f ισχύει $f(2025) > f(2026)$, τότε δεν σημαίνει απαραίτητα ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

ε. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει ότι $f(3) = 4$, τότε η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(4,3)$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = -x^2 + 2x + \alpha - 2$, $g(x) = -x - 2\alpha$ και $h(x) = x^2 - 3x - 4$.

B1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f , g και h .

(Μονάδες 6)

B2. Να βρείτε τιμές των x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης h βρίσκεται πάνω από τον άξονα x' .

(Μονάδες 5)

B3. Αν ισχύει ότι $g(-1) + f(1) = -2$, να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ και στην συνέχεια να μελετήσετε την g ως προς την μονοτονία στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 3 + 4 = 7)

B4. Αν $\alpha = 2$, τότε να βρείτε:

(i) Το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης $\Phi(x) = g(x) - f(x)$.

(ii) Τις τιμές των x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 3 + 4 = 7)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 7x + 2\alpha$ και $g(x) = x^2 + \beta$.

Γ1. Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g , τέμνονται πάνω στον άξονα x' σε σημείο με τετμημένη 1. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Αν $\alpha = 3$ και $\beta = -1$, τότε:

Γ2. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f και g και στην συνέχεια να εξετάσετε αν οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνουν τον άξονα $x'x$ και σε άλλα σημεία.

(Μονάδες 2 + 4 = 6)

Γ3. (i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (μονάδες 3) και στην

συνέχεια να δείξετε ότι $h(x) = \frac{x-6}{x+1}$ (μονάδες 3).

(ii) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης h τέμνει την ευθεία

$$y = -\frac{5}{2}.$$

(Μονάδες 6 + 3 = 9)

Γ4. Αν η γραφική παράσταση της g διέρχεται από το σημείο $M(\kappa, 2\kappa - 2)$, να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2(x+\lambda)}{\sqrt{x-1}}$ και $g(x) = \sqrt{x-1} + \frac{2x-2}{x^2-1}$.

Δ1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f και g .

(Μονάδες 2 + 3 = 5)

Δ2. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $K(2,2)$, να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 4)

Δ3. Για $\lambda = -1$,

(i) Να δείξετε ότι ο τύπος της f γράφεται στην μορφή $f(x) = 2\sqrt{x-1}$, $x \in (1, +\infty)$

και ο τύπος της g γράφεται στην μορφή $g(x) = \sqrt{x-1} + \frac{2}{x+1}$, $x \in (1, +\infty)$.

(ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης $h(x) = f(x) - g(x)$.

(Μονάδες 6 + 3 = 9)

Δ4. Αν $h(x) = \sqrt{x-1} - \frac{2}{x+1}$, $x \in (1, +\infty)$, τότε:

(i) Να μελετήσετε την h ως προς την μονοτονία στο πεδίο ορισμού της

(ii) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $A = h(2025)$ και $B = 45 - \frac{2}{2027}$, αιτιολογώντας την

απάντησή σας (δίνεται ότι $\sqrt{2025} = 45$).

(Μονάδες 4 + 3 = 7)